APPENDICE I : CAPACITÉS

A : CONTRE-EXEMPLES

Notre principal but, ici, est de montrer qu'un affaiblissement, à priori "raisonnable", de diverses hypothèses faites au cours des chapitres précédents peut entrainer les pires déboires.

Les contre-exemples que nous allons donner sont tous dus à Davies. Les deux premiers sont publiés ici pour la première fois, et je remercie vivement Davies pour son aimable autorisation.

Pour simplifier le langage, nous dirons qu'un fonction d'ensembles I "monte" si on a $I(\cup A_n) = \sup I(A_n)$ pour toute suite croissante (A_n), et "descend sur les compacts" si on a $I(\cap K_n) = \inf I(K_n)$ pour toute suite décroissante de compacts (K_n). Ainsi, une capacité est une fonction croissante qui monte, et qui descend sur les compacts.

1 Voici d'abord un exemple très simple de mesure extérieure qui descend sur les compacts, mais qui n'est pas une capacité. L'espace E est forme des points de la suite $(1/n)$, n entier, et de sa limite 0. On pose $J(\emptyset) = 0$, $J(A) = 1$ si $A \neq \emptyset$ et $0 \notin \bar{A}$ et $J(A) = 2$ si $0 \in \bar{A}$. Il est clair que la fonction J a les propriétés enoncées, mais on a $J[\{1,1/2,\ldots,1/n\}] = 1$ pour tout n alors que $J[\{1,1/2,\ldots,1/n,\ldots\}] = 2$. D'autres exemples plus compliqués (mais peut-être moins artificiels) sont dus à DAVIES [ ] et CHOQUET [ ]. Notre fonction J vérifie cependant le théorème de capacitabilité ; les deux autres exemples de Davies et Choquet ne le vérifient pas, mais ont quand même la propriété plus faible suivante : si A est analytique et si $J(A) > 0$, alors A contient un

compact K tel que $J(K) > 0$. Mais cette propriété n'est pas vraie en général, comme nous allons le voir maintenant.

2 Nous allons construire ici une mesure extérieure J qui descend sur les compacts, mais pour laquelle existe un ensemble analytique A (qui sera même $\underline{\underline{G}}_\delta$) tel que $J(A) > 0$ et $J(K) = 0$ pour tout compact K inclus dans A. Nous prendrons pour E un espace métrisable compact sans points isolés et nous désignerons par (F_i) une suite croissante de compacts dénombrables de E ayant la propriété suivante : pour tout entier i, F_i est contenu dans l'adhérence de $(F_{i+1} - F_i)$. Voyons d'abord rapidement comment on peut construire une telle suite. Prenons pour F_1 un point de E, et supposons F_i défini. Soient alors (x^k), k entier, une énumération des points de F_i, et (U_n) une suite décroissante d'ouverts telle que $F_i = \cap \overline{U}_n$. Pour k fixé, choisissons une suite injective (x_n^k) convergeant vers x^k et telle que x_n^k appartienne à $U_{k+n} - F_i$ pour tout n : on peut alors prendre pour compact dénombrable F_{i+1} la réunion de F_i et des $\{x_n^k\}$, k et n parcourant les entiers. Cela étant, pour toute partie A de E, posons $i(A) = \inf \{j : A \cap F_j \neq \emptyset\}$, avec $i(A) = \infty$ si cet ensemble et vide. Donnons nous maintenant une suite strictement décroissante (α_n) de réels > 0 convergeant vers 0 et posons, pour toute partie A de E, $I(A) = \alpha_{i(A)}$, avec la convention $\alpha_\infty = 0$. La fonction I ainsi définie est une capacité, et même une capacité fortement sous-additive (elle est par ailleurs du type considéré au n.14-2) du chapitre V). Il est clair que I est croissante et monte. D'autre part, soit A tel que $I(A) < \alpha_1$ et fixons un $\epsilon > 0$: A est alors disjoint du compact $F_1 \cup \ldots \cup F_j$ où j est $< i(A)$ et suffisamment grand pour que l'on ait $\alpha_{j+1} \leq \alpha_{i(A)} + \epsilon$. Par conséquent I est continue à droite, d'où

la descente sur les compacts. Restreignons maintenant I à $\underline{\underline{K}}(E)$, et construisons la mesure extérieure $J = M_{\infty}^{I}$: $J(A) = \inf \Sigma\, I(K_n)$ où (K_n) est un recouvrement dénombrable de A par des compacts et où l'inf est pris sur l'ensemble de ces recouvrements. La mesure extérieure J descend sur les compacts : en effet, I étant déjà dénombrablement sous-additive, on a $I(K) = J(K)$ pour tout compact K. Désignons maintenant par A le complémentaire de $\bigcup_i F_i$: A est $\underline{\underline{G}}_\delta$ et $J(K) = I(K) = 0$ pour tout compact K inclus dans A. Nous allons voir cependant que l'on a $J(A) = \alpha_1 > 0$, en montrant que toute suite de compacts (K_n) telle que $\Sigma\, I(K_n) < \alpha_1$ ne peut recouvrir A. Une telle suite (K_n) étant fixée, nous allons construire par récurrence une sous-suite d'entiers (n_i) strictement croissante et une suite d'ouverts (U_i) ayant les propriétés suivantes :

i) $F_{i+1} \cap (\bigcup_{n > n_i} K_n) = \emptyset$ pour tout i

ii) $U_i \cap (\bigcup_{n \leq n_i} K_n) = \emptyset$ pour tout i

iii) $\overline{U}_{i+1} \subset U_i$ pour tout i

iv) $U_i \cap (F_{i+1} - F_i) \neq \emptyset$ pour tout i

v) $U_{i+1} \cap F_i = \emptyset$ pour tout i

Dans ces conditions $\bigcap U_i$ sera non vide (cf iii) et iv)), contenu dans A (cf v)), et disjoint de $\bigcup K_n$ (cf ii)). D'abord, comme $\Sigma\, I(K_n)$ est $< \alpha_1$, on a $F_1 \cap (\bigcup K_n) = \emptyset$: choisissons $x_1 \in F_1$, puis un entier n_1 suffisamment grand pour que $F_2 \cap (\bigcup_{n > n_1} K_n) = \emptyset$ (ce qui est possible, car $\lim_n I(K_n) = 0$) et prenons pour U_1 un voisinage ouvert de x_1 suffisamment petit pour que $U_1 \cap (\bigcup_{n \leq n_1} K_n) = \emptyset$. Comme on a $F_1 \subset (\overline{F_2 - F_1})$, $U_1 \cap (F_2 - F_1)$ n'est pas vide. Supposons maintenant n_i et U_i construits : choisissons $x_i \in U_i \cap (F_{i+1} - F_i)$ (ce qui est possible d'après iv), puis $n_{i+1} > n_i$ suffisamment grand pour que $F_{i+2} \cap (\bigcup_{n > n_{i+1}} K_n) = \emptyset$ (ce qui est possible, car $\lim I(K_n) = 0$)

et prenons pour U_{i+1} un voisinage ouvert de x_i suffisamment petit pour que l'on ait $\overline{U}_{i+1} \subset U_i$, $U_{i+1} \cap F_i = \emptyset$ (ce qui est possible, car $x_i \notin F_i$) et $U_{i+1} \cap (\bigcup_{n \geq n_{i+1}} K_n) = \emptyset$ (ce qui est possible, car $x_i \notin \bigcup K_n$ d'après i) et ii)). Pour pouvoir continuer la récurrence, il ne reste plus qu'à vérifier que $U_{i+1} \cap (F_{i+2} - F_{i+1})$ n'est pas vide, ce qui résulte de l'hypothèse que F_{i+1} est contenu dans l'adhérence de $(F_{i+2} - F_{i+1})$.

REMARQUES.- 1) Comme I est continue à droite, on a pour toute partie A de E, $I(A) = \inf I(\bigcup K_n)$, où (K_n) est un recouvrement etc. Ce qui se passe ici, c'est que, pour $\alpha_1 > \varepsilon > 0$, il existe des recouvrements (K_n) de $E - \bigcup F_i$ tels que $I(\bigcup K_n) \leq \varepsilon$, mais alors on a forcément $\Sigma\, I(K_n) = +\infty$.

2) La mesure extérieure $J = M_\infty^I$ est construite sur le modèle des mesures extérieures M_∞^α du paragraphe 2 du chapitre VI, lesquelles sont des capacités. Mais ici, la fonction I est seulement s.c.s. pour la topologie de Hausdorff, alors que les α étaient supposées continues [la fonction I ne vérifie pas non plus la condition $I(K) > 0$ pour K ayant plus d'un point, mais ce n'est pas essentiel : en ajoutant à I une "bonne"fonction α telle que $M^\alpha(E) = 0$, on aura encore $M_\infty^{I+\alpha}(E - \bigcup F_i) \geq \alpha_1$ et $M_\infty^{I+\alpha}(K) = 0$ pour tout compact K inclus dans $E - \bigcup F_i$. On peut voir facilement qu'une telle fonction α existe toujours; pour $E \subset \mathbb{R}^d$, il suffit de prendre $\alpha = h \circ \delta$ avec $h(t) = t^{d+1}$].

Le dernier exemple est un "sous-produit" de l'existence d'espaces lusiniens métrisables pour lesquels le critère de Prokhorov n'est pas une condition nécessaire pour la compacité d'un ensemble de mesures. Nous renvoyons à DAVIES [ ] pour la démonstration

4 Nous allons donner un exemple de capacité I, non fortement sous-additive, pour laquelle existe un ensemble analytique A (qui sera même un $\underline{\underline{G}}_\delta$) tel que $I(A) = 0$ et $I(U) = 1$ pour tout ouvert U contenant A. Nous prendrons pour E le carré $[0,1] \times [0,1]$, désignerons par t un point courant du premier facteur et par λ la mesure de Lebesgue sur le second. Posons, pour toute partie A de E, $I(A) = \sup\limits_t \lambda^*[A(t)]$, où $A(t)$ est la coupe de A suivant t. La fonction I ainsi définie est une capacité (elle est du type considéré au n.14-2) du chapitre V). Et il existe un $\underline{\underline{G}}_\delta$ de capacité nulle tel que tout ouvert le contenant contienne une verticale de E (i.e. un ensemble de la forme $\{t\} \times [0,1]$). D'où la conclusion.

B : CAPACITÉS FORTEMENT SOUS-ADDITIVES

Le théorème suivant est dû à Choquet et Strassen (cf DELLACHERIE [ ])

5 THÉORÈME.- Soient E un espace métrisable compact et I une capacité fortement sous-additive sur $\underline{\underline{K}}(E)$, telle que $I(E) < +\infty$. L'ensemble $\mathcal{L}$ des mesures λ sur E telles que $\lambda(K) \leq I(K)$ pour tout $K \in \underline{\underline{K}}(E)$ est un convexe compact pour la topologie vague, et, pour tout $K \in \underline{\underline{K}}(E)$ il existe $\lambda \in \mathcal{L}$ telle que $\lambda(K) = I(K)$.

REMARQUES.- 1) D'après le n.14-2) du chapitre V, la fonction J définie par $J(A) = \sup \lambda^*(A)$, $\lambda \in \mathcal{L}$ est une capacité, et l'on a alors, d'après le théorème de capacitabilité, $I(A) = J(A)$ pour tout ensemble analytique A.

2) L'extension, non triviale, de ce théorème au cas où E est localement compact à base dénombrable et I est finie sur les compacts est due à ANGER [ ]

3) En gros, le théorème affirme qu'une capacité fortement sous-additive est égale au sup des mesures qu'elle majore (le sup étant entendu au sens des fonctions sur $\phi(E)$). La situation peut être totalement différente si on suppose seulement que la capacité I est dénombrablement sous-additive. Le contre-exemple de DAVIES et ROGERS [ ] en théorie des mesures de Hausdorff, que nous avons déjà cité à la remarque du n.27 du chapitre VI, fournit un exemple de capacité dénombrablement sous-additive M_∞^h telle que toute mesure λ soit portée par un borélien de capacité nulle pour M_∞^h : la capacité M_∞^h ne majore que la mesure nulle.

Il est facile de voir que le procédé du n.14 du chapitre V ne fournit pas en général des capacités fortement sous-additives. Une caractérisation simple des compacts vagues de mesures fournissant des capacités fortement sous-additives a été donnée récemment par ANGER [ ], auquel nous empruntons le résultat suivant, en nous bornant au cas où E est compact

6 THÉORÈME.- Sous les hypothèses du théorème 5, on a de plus : si K et L sont deux compacts tels que $K \subset L$, il existe $\lambda \in \mathcal{L}$ telle que $\lambda(K) = I(K)$ et $\lambda(L) = I(L)$.

Il est facile de voir que cette propriété entraine la sous-additivité forte de I.

C : CAPACITÉS ALTERNÉES D'ORDRE INFINI

Les résultats consignés ici proviennent tous de CHOQUET [ ].

7 Définissons d'abord les "différences successives" d'une fonction finie I sur $\underline{\underline{K}}(E)$. Si K, L_1, L_2, ..., L_n, ... sont des éléments

de $\underline{\underline{K}}(E)$, on pose

$$\Delta_1(K;L_1) = I(K) - I(K \cup L_1)$$

$$\Delta_2(K;L_1,L_2) = \Delta_1(K;L_1) - \Delta_1(K \cup L_2;L_1)$$
$$= I(K) - I(K \cup L_1) - I(K \cup L_2) + I(K \cup L_1 \cup L_2)$$

et, d'une manière générale, si Δ_n est définie,

$$\Delta_{n+1}(K;L_1,\dots,L_n,L_{n+1}) = \Delta_n(K;L_1,\dots L_n) - \Delta_n(K \cup L_{n+1};L_1,\dots,L_n)$$

On vérifie aisément que, pour K fixé, la fonction Δ_n est symétrique en les L_i.

Pour n entier, on définit ainsi une fonction Δ_n sur $\underline{\underline{K}}(E)^{n+1}$ (nous nous permettrons de dire que Δ_n est une fonction, quoique qu'elle ne soit pas en général à valeurs positives : on va même ne s'occuper que du cas où les fonctions Δ_n sont toujours négatives !). Il est clair de $(\Delta_1 \leq 0) \Leftrightarrow$(I est croissante) et $(\Delta_2 \leq 0) \Leftrightarrow$ (I est fortement sous-additive). Plus généralement, nous poserons

8 DÉFINITION.- La fonction I sur $\underline{\underline{K}}(E)$ est dite alternée d'ordre p (p entier) si l'on a $\Delta_n \leq 0$ pour tout $n \leq p$. Elle est dite alternée d'ordre ∞ si l'on a $\Delta_n \leq 0$ pour tout n.

Il est bien connu que l'on a $\Delta_n = 0$ pour tout n si I est une mesure : toute mesure est donc une fonction alternée d'ordre ∞. Plus généralement, on a le théorème, facile, suivant

9 THÉORÈME.- Soient ExF un produit, G une partie compacte de ExF, et λ une mesure sur F. La fonction I sur $\underline{\underline{K}}(E)$ définie par $I(K) = \lambda[\pi(G \cap (K\times F)]$, où K appartient à $\underline{\underline{K}}(E)$ et π désigne la projection de ExF sur F, est alternée d'ordre ∞.

De plus, la fonction I de ce théorème est continue à droite : comme au paragraphe 4 du chapitre II, nous dirons par abus de langage que I est une capacité alternée d'ordre ∞. Et, réciproquement, toute capacité alternée d'ordre ∞ est de ce type; on a même mieux : on peut toujours prendre $F = \underline{\underline{K}}(E)$ et $G = \{(x,K) : x \in K\}$. Plus précisement, on a le théorème suivant (dont la démonstration a été le banc d'essai du célèbre théorème de représentation intégrale de Choquet)

10 THÉORÈME.- Soit I une capacité alternée d'ordre ∞ telle que $I(\emptyset) = 0$. Il existe alors une mesure unique λ sur $\underline{\underline{K}}(E)$ telle que l'on ait

$$I(K) = \lambda[\{L \in \underline{\underline{K}}(E) : K \cap L \neq \emptyset\}]$$

pour tout compact K de E.

Lorsque λ est une mesure de Dirac, on retrouve les capacités élémentaires du n.3-1) du chapitre II, qui sont en fait les points extrémaux dans la représentation intégrale.

APPENDICE II : RABOTAGES

Nous allons présenter ici une methode différente pour définir un ensemble de "bonnes" fonctions (developpée dans DELLACHERIE [ ] et [ ]). Ces fonctions, que nous appellerons "fonctions lisses", ont des propriétés tout à fait analogues à celles des fonctions analytiques : nous verrons par exemple, que toute fonction s.c.s. est lisse et que l'ensemble des fonctions lisses est "stable pour l'opération A " (i.e., pour la formation de noyaux de schémas de Souslin); en particulier, toute fonction analytique sera lisse. La définition d'une fonction lisse, comme nous verrons plus loin, n'est pas "constructive", ce qui me fait conjecturer (peut-être hardiment, étant peu ferré en la matière) l'indécidabilité de la proposition " toute fonction lisse est analytique".

Cette notion de fonction lisse provient d'une idée originale de SIERPINSKI [ ] pour démontrer le théorème d'Alexandrov et Hausdorff (l'analogue du théorème de Souslin -n.6 du chapitre V - pour les boréliens). Ce que l'on va faire ici, ce n'est pas étendre la notion de fonction borélienne, comme dans le cas des fonctions analytiques, mais plutôt restreindre la classe des fonctions universellement capacitables pour avoir de bonnes propriétés de stabilité.

Quoique les concepts initiaux soient un peu compliqués, parce qu'inhabituels, je pense que cette méthode est digne d'intérêt, et qu'elle devrait en particulier retenir l'attention des logiciens.

Nous nous bornerons ici encore à considérer une situation topologique : E, F etc designent des espaces métrisables compacts

D'abord, deux définitions pour abréger le langage

1 DÉFINITION.- On appelle adhérence d'une fonction f définie sur E la plus petite fonction s.c.s. majorant f, que l'on note $\bar{f}$.

2 DÉFINITION.- Un ensemble $\mathbf{C}$ de fonctions sur E est appelé une capacitance s'il satisfait les conditions suivantes

a) si f appartient à $\mathbf{C}$ et si on a $g \geq f$, alors g appartient à $\mathbf{C}$

b) si (f_n) est une suite croissante, et si $\sup f_n$ appartient à $\mathbf{C}$, il existe un entier k tel que f_k appartienne à $\mathbf{C}$.

Autrement dit, l'ensemble $\mathbf{C}$ est une capacitance si et seulement si sa fonction indicatrice est une précapacité (à valeurs 0 ou 1).

RABOTAGES

Nous désignerons désormais par Γ l'ensemble des capacitances sur E, et par ϕ l'ensemble des fonctions sur E.

3 DÉFINITION.- Un rabotage sur E est une application R de $\Gamma^{\mathbb{N}} \times \phi^{\mathbb{N}}$ dans $\phi^{\mathbb{N}}$ satisfaisant les conditions suivantes

a) pour tout couple de suites $[(\mathbf{C}_n),(f_n)]$, le k-ième terme de la suite $R[(\mathbf{C}_n),(f_n)]$ est majoré par f_k, pour tout entier k

b) de plus, si pour un entier k, la fonction f_k appartient à $\mathbf{C}_k$, alors le k-ième terme de la suite $R[(\mathbf{C}_n),(f_n)]$ appartient à $\mathbf{C}_k$

c) enfin, si les deux couples de suites $[(\mathbf{C}_n),(f_n)]$ et $[(\mathbf{C}'_n),(f'_n)]$ ont les mêmes k premiers termes, alors les suites images par R ont aussi les mêmes k premiers termes.

4 L'exemple le plus simple de rabotage est le rabotage identique, i.e. la projection de $\Gamma^{\mathbb{N}} \times \phi^{\mathbb{N}}$ sur $\phi^{\mathbb{N}}$; c'est aussi un exemple important, car il permet de construire d'autres rabotages.

Mais, avant d'aller plus loin, commentons cette définition qui semble bien compliquée au premier abord. Soit R un rabotage, fixons l'argument $(\underline{\underline{C}}_n) \in \Gamma^{\mathbb{N}}$, et regardons l'application partielle de $\phi^{\mathbb{N}}$ dans $\phi^{\mathbb{N}}$. Pour cela, désignons par r_k la composée de cette application partielle avec l'application coordonnée de rang k de $\phi^{\mathbb{N}}$. D'apres le c) du n.3, $r_k[(f_n)]$ ne dépend que de $f_1, f_2, \ldots, f_k$: autrement dit, on peut considérer que r_k est une application de ϕ^k dans ϕ. On peut alors écrire les conditions a) et b) du n.3 sous la forme

i) on a $r_k[f_1, \ldots, f_k] \leq f_k$ pour tout k et tout $f_1, \ldots, f_k$

ii) si pour un entier k, la fonction f_k appartient à $\underline{\underline{C}}_k$, alors la fonction $r_k[f_1, \ldots, f_k]$ appartient aussi à $\underline{\underline{C}}_k$

Intuitivement, une capacitance est une classe de "grandes" fonctions La condition i) exprime que l'on diminue la "grandeur" de la fonction f_k et la condition ii) exprime que cette diminution n'est pas trop importante. Pour simplifier le langage, nous dirons désormais que la suite (r_n) est la <u>restriction du rabotage</u> R <u>à la suite de capacitances</u> $(\underline{\underline{C}}_n)$.

5 DÉFINITION.- <u>Soient</u> R <u>un rabotage</u>, $(\underline{\underline{C}}_n)$ <u>une suite de capacitances et</u> (r_n) <u>la restriction de</u> R <u>à</u> $(\underline{\underline{C}}_n)$. <u>Une suite de fonctions</u> (f_n) <u>est dite</u> (r_n)-<u>rabotée si elle satisfait les conditions suivantes</u>

a) <u>la fonction</u> f_n <u>appartient à la capacitance</u> $\underline{\underline{C}}_n$ <u>pour tout</u> n

b) <u>la fonction</u> f_{n+1} <u>est majorée par</u> $r_n[f_1, \ldots, f_n]$ <u>pour tout</u> n

Il est clair qu'une suite rabotée est toujours décroissante (nous dirons "suite rabotée" s'il n'y a pas de confusion possible sur R et sur $(\underline{\underline{C}}_n)$).

FONCTIONS LISSES

6 DÉFINITION.- *On dit qu'un rabotage* R *est* compatible *avec une fonction* f *si la condition suivante est satisfaite* :

pour toute suite de capacitances ($\underline{\underline{C}}_n$), *et toute suite rabotée* (f_n), *la fonction* f *majore* $\inf_n \bar{f}_n$ *dès qu'elle majore la fonction* f_1

On dit qu'une fonction f *est* lisse *s'il existe un rabotage compatible avec elle.*

Ainsi, toute fonction s.c.s. est lisse, puisque compatible avec le rabotage identique. Et l'on a le théorème de stabilité suivant

7 THÉORÈME.- *L'ensemble des fonctions lisses sur* E *est stable pour* ($\vee d, \wedge d, + d, \times d$). *D'une manière générale, si* $s \to f_s$ *est un schéma de Souslin où les* f_s *sont lisses, le noyau de ce schéma est encore une fonction lisse. De même, si* f *définie sur un produit* ExF *est lisse, sa projection* πf *sur* E *est encore lisse.*

En particulier, toute fonction analytique est lisse.

CAPACITABILITÉ

8 THÉORÈME.- *Toute fonction lisse est universellement capacitable*

Etant donnés les théorèmes 7 et 8, on a le *théorème de séparation* (cf n.10 du chapitre II) pour les ensembles lisses. En particulier, un ensemble lisse A dont le complémentaire est encore lisse est forcement borélien, et donc les complémentaires d'ensembles analytiques non boréliens ne peuvent être lisses.

9 THÉORÈME.- *Soit* V *un noyau capacitaire régulier de* E *dans* F

Si f *est lisse sur* E, *alors* Vf *est lisse sur* F.

Et on a un théorème analogue pour les projections capacitaires.

Plaçons nous maintenant sous les hypothèses du chapitre V

10 THÉORÈME.- Soient A un ensemble lisse et J l'épaisseur associée à une capacité I. On a alors

$$J(A) = \sup J(K),\ K \text{ compact inclus dans } A$$

En particulier, tout ensemble lisse non-dénombrable contient un ensemble parfait non vide (et a donc la puissance du continu).

On a donc toute une série de propriétés communes aux fonctions analytiques et aux fonctions lisses. La démonstration du théorème 10 est d'ailleurs voisine de celle que nous avons donnée pour les ensembles analytiques. Par contre, les démonstrations des théorèmes 7 et 9 font appel à des techniques tout à fait différentes. Une étape importante (due essentiellement à Sierpinski) dans ces démonstrations : si (R_n) est une suite de rabotages, il existe un rabotage R (obtenu en "mélangeant" les R_n) tel qu'une fonction soit compatible avec R dès qu'elle est compatible avec l'un des R_n.

COMMENTAIRES

Les références bibliographiques ne renvoient pas toujours au premier article où un résultat a été démontré.

CHAPITRE I : L'idée de définir les ensembles analytiques comme images directes de boréliens "simples" par de "bonnes" fonctions remonte aux travaux classiques des écoles russe et polonaise. Elle n'a cependant pas été systematisée avant Choquet [6] dans les cas topologique et Meyer [32] dans les cas abstrait.
Nous avons suivi, comme il a été déjà dit, la présentation de Meyer. La démonstration du théorème 14 provient cependant de Choquet [8] : c'est sans doute la voie la plus simple pour démontrer "l'idempotence de l'opération A", y compris dans le cas abstrait.
Pour la méthode symbolique de Kuratowski-Tarski, nous avons suivi l'article original [30] de Kuratowski. Pour plus de détails sur la théorie des ensembles analytiques, nous renverrons au traité classique [31] de Kuratowski, et à la monographie récente [29] de Hoffmann-Jørgensen, qui contient en outre des commentaires très intéressants. Pour les développements récents de la théorie des ensembles analytiques, on consultera les travaux de Frolik, Rogers, Sion etc

CHAPITRE II : La théorie des capacités trouve sa source dans le mémoire fondamental [6] de Choquet, dans lequel on trouve aussi une étude détaillée de la capacité newtonienne et des capacités alternées d'ordre p. La démonstration de la version abstraite du théorème de capacitabilité, par schémas de Souslin, se trouve dans un autre article [9] de Choquet; elle avait cependant été essentiellement trouvée auparavant - et indépendamment - par Davies [10]. Le théorème topologique de capacitabilité de Sion provient de son article [39] (qui contient aussi une discussion des concepts de "mesurabilité" et "capacitabilité") : c'est un théorème très important (voir par exemple Bourbaki [4]), que nous ne pouvions mettre en valeur dans notre cadre topologique simple. Les applications à la théorie de la mesure dérivent de Choquet [6]; la démonstration du théorème de séparation provient de Dellacherie [24] Le théorème de prolongement des fonctions fortement sous-additives est aussi dû à Choquet [6] : on peut partir de là pour établir les théorèmes classiques de prolongement de mesures (cf Meyer [32]).

CHAPITRE III : La topologie de Hausdorff a été introduite par Hausdorff sous la forme "mètrique". Lorsque l'espace E est mètrisable mais non compact, la définition "topologique" définit la "topologie exponentielle" sur l'ensemble des parties fermées, topologie alors strictement moins fine que celle obtenue par la définition "mètrique" (voir Kuratowski [31]). La notion de calibre, et les théorèmes sur les calibres proviennent de Dellacherie [26]. Mais c'est l'aboutissement de la confrontation de la démonstration du théorème de Mazurkiewicz-Sierpinski donnée par Kuratowski [30] et du théorème de Mokobodzki sur les noyaux capacitaires.

CHAPITRE IV : La notion de noyau capacitaire et les résultats fondamentaux proviennent de l'article peu connu [33] de Mokobodzki. Le théorème 4 provient de Dellacherie [26], et la démonstration de l'existence des "schémas de Mokobodzki" est différente de celle de [33], mais en reprend les idées essentielles. Nous profitons de ces "commentaires" pour rajouter quelques lignes qui auraient dû trouver leur place dans le texte principal. La longue liste d'exemples de noyaux a pour objet principal de montrer que les noyaux sont des êtres fréquemment rencontrés : pour la plupart, on savait déjà qu'ils transformaient toute fonction analytique en une fonction analytique. Pour d'autres, il est plus simple de l'établir directement : c'est en particulier le cas pour les deux exemples suivants, oubliés en cours de rédaction

i) le noyau de $\underline{\underline{K}}(E)$ dans E qui, à toute famille de compacts (K_i), associe la réunion $\cup K_i$

ii) le noyau de E dans $\underline{\underline{K}}(E)$ qui, à toute partie A de E, associe la famille des compacts qui rencontrent A.

La notion de projection capacitaire provient de Dellacherie [21], où nous avions trouvé - indépendamment - des résultats voisins de ceux de Mokobodzki.

CHAPITRE V : Comme il a été déjà dit, ce chapitre reprend un chapitre de Dellacherie [25], avec les aménagements nécessaires pour démontrer qu'une épaisseur est un calibre. Et c'est l'aboutissement de la confrontation de nos travaux en théorie des probabilités et du potentiel (cf [19] et [20]) avec ceux de Davies en théorie des mesures de Hausdorff (cf [12] et [13]). La "philosophie" de la démonstration du théorème 4 remonte aux travaux de l'école polonaise, et l'idée d'utiliser la topologie de Hausdorff dans la démonstration du theoreme 10 provient de Davies [13] (ainsi que le raffinement de la remarque 1) du théorème 4).

CHAPITRE VI : Comme il a été déjà dit, on trouvera un traitement élégant des mesures de Hausdorff dans le beau livre [36] de Rogers, malheureusement pas écrit - à notre avis - dans le langage des capacités. Celui-ci a par contre été adopté par Carleson dans

son petit livre [5]. En ce qui concerne le paragraphe 2, la meilleure référence reste l'article [40] de Sion et Sjerve.
La propriété de "montée" des mesures M_t^α a sa petite histoire : d'abord établie par Besicovitch pour des mesures définies par des réseaux, elle a été ensuite prouvée pour les mesures dimensionnelles dans $\mathbb{R}^n$ par Davies [11] en utilisant des recouvrements par des

puis prouvée en toute généralité en utilisant la topologie de Hausdorff par Sion et Sjerve [40] (Davies dit par ailleurs dans [14] que l'idée initiale proviendrait de Minlos). Les théorèmes 21 et 25 proviennent de Dellacherie [16] : le théorème 21 donne une réponse affirmative à l'une des questions posées par Federer dans [27],2.10.27, tout au moins dans le cas des espaces métriques compacts (l'autre question a été résolue, par l'affirmative, par Davies dans [15]).
Pour la démonstration du théorème de Besicovitch (paragraphe 3), nous avons suivi l'excellente rédaction de Federer [27], en la développant quelque peu, ce qui n'a fait peut-être que l'obscurcir.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Anger B. : Approximation of capacities by measures (Lecture Notes Math. Vol 226, p 152-170, 1971)

[2] : Kapazitaeten und obere Einhuellende von Massen (à paraitre)

[3] Bourbaki N. : Eléments de mathématiques. Topologie générale 3e édition, Chapitre 9 (Hermann. Sous presse)

[4] : Elements de mathématiques. Intégration 3e édition, Chapitre 9 (Hermann 1971)

[5] Carleson L. : Selected problems on exceptional sets (Van Nostrand 1967)

[6] Choquet G. : Theory of capacities (Ann Inst Fourier Grenoble 5, p 131-295, 1955)

[7] : Sur les fondements de la théorie fine du potentiel (Séminaire Brelot-Choquet-Deny, Institut Poincaré, 1e année, 10 pages, 1957)

[8] : Ensembles $\mathcal{K}$-analytiques et $\mathcal{K}$-sousliniens... (Ann Inst Fourier, Grenoble 9, p 75-82, 1959)

[9] : Forme abstraite du théorème de capacitabilité. (Ibid, p 83-89)

[10] Davies R.O. : Subsets of finite measure in analytic sets (Indag Math 14, p 488-489, 1952)

[11] : A property of Hausdorff measure (Proc Phil Soc Cambridge 52, p 30-34, 1956)

[12] : Non σ-finite closed subsets of analytic sets (Ibid, p 174-177)

[13] : A theorem on the existence of non σ-finite subsets (Mathematika 15, p 60-62, 1968)

[14] : Measure of Hausdorff type (J. London Math Soc 1, p 30-34, 1969)

[15] : Increasing sequences of sets and Hausdorff measure (Proc London Math Soc 20, p 222-236, 1970)

[16] : A non-Prohorov space (Bull London Math Soc 3, p 341-342, 1971)

[17] : Sion-Sjerve measures are of Hausdorff type (J. London Math Soc, 1972, sous presse)

[18] Davies R.O. et Rogers C.A. : The problem of subsets of finite positive measure (Bull London Math Soc 1, p 47-54, 1969)

[19] Dellacherie C. : Ensembles aléatoires I (Lecture Notes Math Vol 88, p 97-114, Springer 1969)

[20] : Ensembles aléatoires II (Ibid, p 115-136)

[21] : Quelques résultats sur les capacités (C.R. Acad Sc Paris 269, p 576-579, 1969)

[22] : Quelques commentaires sur les prolongements ... (Lecture Notes Math Vol 191, p 77-81, Springer 1971)

[23] : Ensembles pavés et rabotages (Ibid, p 103-126)

[24] : Une démonstration du théorème de séparation des ensembles analytiques (Ibid, p)

[25] : Capacités et processus stochastiques (Springer 1972)

[26] : Sur quelques operations conservant l'analyticité (C.R. Acad Sc Paris, 1972)

[27] Federer H. : Geometric measure theory (Springer 1969)

[28] Frolik Z. : A survey of separable descriptive theory of sets ... (Czechoslovak Math J. 20, p 406-467, 1970)

[29] Hoffmann-Jørgensen J. : The theory of analytic spaces (Aarhus Universitet Mathematik Inst., 1970)

[30] Kuratowski C. : Evaluation de la classe borélienne ou ... (Fund Math 17, p 249-271,)

[31] : Topology Vol I et II. New edition ... (Academic Press et P.W.N., 1966)

[32] Meyer P.A. : Probabilités et Potentiel (Hermann 1966; en anglais, chez Blaisdell)

[33] Mokobodzki G. : Capacités fonctionnelles (Séminaire Choquet, Inst Poincaré, Paris 6e année, 6 pages, 1966/67)

[34] Munroe M.E. : Introduction to measure and integration (Addison Wesley 1959)

[35] Rogers C.A. : Analytic sets in Hausdorff spaces (Mathematika 11, p 1-8, 1964)

[36] : Hausdorff Measures (Cambridge University Press 1970)

[37] Sierpinski W. : Sur la puissance des ensembles mesurables B (Fund Math 5, p 166-171, 1924)

[38] : Sur deux complémentaires analytiques non séparables B (Fund Math 18, p 296-297,)

[39] Sion M. : On capacitability and measurability (Ann Inst Fourier Grenoble 13, p 88-99, 1963)

[40] Sion M. et Sjerve D. : Approximation properties of measures ... (Mathematika 9, p 145-156, 1962)

NOTATIONS

INDEX TERMINOLOGIQUE